

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) το μέγιστο στοιχείο, το ελάχιστο σημείο, το supremum και το infimum καθενός από τα παρακάτω σύνολα.

$$A = \left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 + 2)^2 \leq 4\},$$

$$\Gamma = \left\{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 1 < 8\}.$$

2. Έστω A υποσύνολο του \mathbb{R} και $\rho \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(i) $\inf A = \rho$.

(ii) α) Ο αριθμός ρ είναι κάτω φράγμα του A .

β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $x < \rho + \varepsilon$.

3. Έστω A ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} .

α) Δείξτε ότι $\inf A \leq \sup A$.

β) Αν $\sup A = \inf A$ δείξτε ότι το A είναι μονοσύνολο.

4. Δίνονται A, B δύο μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} ώστε το A να είναι άνω φραγμένο, το B να είναι κάτω φραγμένο ώστε επιπλέον να ισχύει $\sup A = \inf B$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $\beta \in B$ ώστε $\beta - a < \varepsilon$.

5. Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\alpha) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \beta) \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

6. Δίνεται $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σύνολο $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < \lambda\}$. Δείξτε ότι $\sup A = \lambda$.